Zum Übergang von kantischer Logik und mathematischer Logik

Paul Natterer

Seebohm (Some Difficulties in Kant's Conception of Formal Logic. In: *Proceedings of the Eigth International Kant Congress, Memphis 1995*, I, Milwaukee 1995, 576–579) entwickelt den Übergang von der kantischen reinen Logik (intensionale Begriffslogik) und ihrer logischen Grammatik zur extensionalen mathematischen Logik als einer speziellen Logik so:

> (1) Die kantische Theorie der Algebra nach der Methodenlehre der *Kritik der reinen Vernunft* (KrV B 745, 762) besagt: **Algebra ist die Konstruktion von Symbolkonfigurationen**, die Regeln für die Anschauung folgen. Diese Regeln betreffen die **Relationen zwischen Größen in der Anschauung**. Diese sind **reine Mannigfaltigkeiten in Raum und Zeit**.
>
> (2) Im Rahmen der kantischen Theorie ist es korrekt, den Term „Größen" durch „Mengen" zu ersetzen. **Mengen haben Elemente, auf die in der logischen Theorie durch Individuenvariable (und -konstanten) Bezug genommen wird**. Elemente sind individuelle Objekte, die – so Kant – nur in der Anschauung gegeben sind, da die reine Vernunft den Begriff des Individuums nicht zu konstruieren vermag bzw. kein ihm korrespondierendes Objekt finden kann. Der Mengenbegriff bezieht sich **potentiell** – nicht aktuell – auf **Aggregate von Individuen** oder potentiellen Anschauungsobjekten, d.h. Objektvariablen und ihm entspricht ein rein **formaler Begriff von Referenz**.
>
> (3) Das **Resultat ist formale Logik unter der Spezifizierung der Extensionalität mit Mengen als Gegenstandsbereich**. Sie wendet die reine logische Grammatik auf einen bestimmten Gegenstandsbereich an: Mengen. Mengen und die Mengenlehre sind aber die Basis der mathematischen Logik und so ist das Resultat die **spezielle Logik der Mathematik**.
>
> (4) Die objektive Gültigkeit und wissenschaftliche Anwendbarkeit der Mathematik für alle Erfahrungsobjekte folgt und ergibt sich aus den **Axiomen der Anschauung** und **Antizipationen der Wahrnehmung** als deren abstrakte **Ausweitung auf reine Mengen und Individuenvariable bzw. -konstanten**.
>
> (5) **Voraussetzung dieser Logik der Mathematik ist die Einbeziehung der transzendentalen Logik als Rechtfertigung des Gebrauchs der Urteilsformen (Kategorien) und ihrer Referenz (Grundsätze).** Da andererseits die reine formale Logik nach Kant **von aller Referenz abzusehen hat**, qualifiziert Seebohm diese Anwendung der formalen Logik als „pseudokantisch".

In Kap. 5 meines *Systematischen Kommentars zur Kritik der reinen Vernunft* wird diese Frage der referentiellen, extensionalen Geltung der formalen Logik weitererörtert. Dort wird die zentrale These der mittelbaren Referentialität der formalen Logik formuliert, d.h. die nur **methodische**, nicht ontologische **Abstraktion vom Gegenstandsbezug**. Das bedeutet in unserem Zusammenhang: die von Seebohm von Kant her entwickelte spezielle Logik der Mathematik ist genuin kantisch. Diese **mittelbare Referentialität** der Logik nach **Voraussetzungen** und **Konsequenzen** impliziert in Anwendung auf die formalisierte mathematische Logik und Mathematik auch eine der logischen Theorie korrespondierende formale Ontologie, ohne dass angenommen werden muss, dass die Architektur der KrV wegen der Vermengung formaler und transzendentaler Logik fragwürdig wird (vgl. Seebohm 1995, 578).

Parallele Ausarbeitungen der mathematischen formalisierten Logik und der korrespondierenden formalen Ontologie der Mengen und Elemente aus der kantischen formalen Logik und transzendentalen Logik bieten Schulthess (*Relation und Funktion. Eine systematische und entwicklungsgeschichtliche Untersuchung zur theoretischen Philosophie Kants*, Berlin/New York 1981), O'Neill (Transcendental Synthesis and Developmental Psychology. In: KS 75 (1984), 149–167) und Falkenburg (*Kants Kosmologie: die wissenschaftliche Revolution der Naturphilosophie im 18. Jahrhundert*, Frankfurt/M. 2000).

Zur **Kantischen Theorie der Mathematik** selbst hier diese Hinweise:

- **Aktuelle monographische Aufarbeitungen** zu Kants Philosophie der Mathematik sind Koriako: *Kants Philosophie der Mathematik. Grundlagen – Voraussetzungen – Probleme*, Hamburg 1999, und Pierobon: *Kant et les mathématiques. La conception kantienne des mathématique*s, Paris 2003; sowie Shabel: *Mathematics in Kant's Critical Philosophy,* London 2003. Dass und wie das Interesse und der Respekt vor der kantischen Philosophie der Mathematik in den letzten Jahrzehnten gewachsen ist, zeigt Posy: *Kant's Philosophy of Mathematics*, Dordrecht/Boston/London 1992. Der Sammelband bilanziert deren Rekonstruktion und Diskussion im modernen Reflexionshorizont.
- Tragesser (How Mathematical Foundation all but come about: A Report on Studies Toward a Phenomenological Critique of Gödel's Views on Mathematical Intuition. In: Seebohm, Th. M./ Føllesdal, D./Mohanty, J. N. (eds.) *Phenomenology and the Formal Sciences* 1991, 195–213), Manders (On Geometric Intentionality. In: Seebohm, Th. M./Føllesdal, D./Mohanty, J. N. (eds.) *Phenomenology and the Formal Sciences* 1991, 215–224), Carson (Kant on Intuition in Geometry. In: *Canadian Journal of Philosophy* 27 (1998), 489–512), Koriako (Kants Schematismuslehre und ihre Relevanz für die Philosophie der Mathematik. In: *Archiv f. Geschichte der Philosophie* 83 (2001), 286–307) und Parsons (*Mathematical Thought and Its Objects*, Cambridge 2008) reformulieren die von Kant, Husserl und Gödel vertretene Grundlegung der Mathematik in irgendeiner Art von **kategorialer, reiner Anschauung** als wesentlich auch und selbst in der mathematischen Logik, Zahlentheorie, Mengentheorie, Analysis und Funktionentheorie.
- Objekte der Erfahrung sind in der kantischen Theorie ganz allgemein **Koprodukte von (1) logischem Wesen, (2) material-realem Wesen, (3)**

formal-realem Wesen (*Logik*, Einl. VIII; *Metaphysikvorlesungen*; Stuhlmann-Laeisz (*Kants Logik. Eine Interpretation auf der Grundlage von Vorlesungen, veröffentlichten Werken und Nachlaß*, Berlin/New York 1976), de Jong (Kant's Analytic Judgments and the Traditional Theory of Concepts. In: *Journal of the History of Philosophy* 33 (1995), 613–641). Die Prädikabilientheorie der Tradition ist dabei der Horizont der kantischen Diskussion des logischen – formalen – realen Wesens. Das dreidimensionale Wesen gestattet als logisches Wesen oder „Prinzip der Möglichkeit durch Begriffe" **analytische Ableitungen** (*propria*) (KrV *Einleitung* IV; *Metaphysikvorlesungen*; de Jong a.a.O. 1995); als formal-reales Wesen oder „Prinzip der Möglichkeit durch [reine] Anschauung" **synthetisch-apriorische Ableitungen** (*propria*) (KrV *Einleitung* V; *Entdeckung*; *Metaphysikvorlesungen*; de Jong (1995)); als (kognitiv unzugängliches) material-reales Wesen oder Prinzip der Möglichkeit durch empirische Anschauung (Induktion) **synthetisch-aposteriorische Ableitungen** (Akzidenzien) (KrV *Einleitung* A und B; MAN *Vorrede*; *Entdeckung*; *Metaphysikvorlesungen*; Stuhlmann-Laeisz a.a.O. 1976, de Jong a.a.O. 1995).

- Diese **Dreidimensionalität des** *realen* **objektiven Verstandesgebrauchs gilt** *mutatis mutandis* **auch für den konstruktiven objektiven Verstandesgebrauch in der Mathematik**: Die kantische Theorie der Mathematik definiert diese als **Komplex (1) ideeller, (2) konstruktiver und (3) axiomatisch-deduktiver Elemente**. (1) bezieht sich auf **Definitionen**: siehe KrV B 755–760, v.a. KrV B 746–747, wo Kant an der Trigonometrie veranschaulicht, dass diese den „**Begriff**[e] vom Triangel" voraussetzt und zuerst „diskursiv nachdenken" muss, um „auf die bloße **Definition**" zu kommen, „von der ich aber billig **anfangen** müßte". (2) bezieht sich auf **Axiome** als durch Setzung bzw. intuitive oder logische Evidenz begründete synthetisch-apriorische Prinzipien (siehe KrV B 760–762). Die Begründung der axiomatischen (Voraus)Setzungen erfolgt bekanntlich entweder – wie bei Kant – intuitionistisch: Axiome sind transzendental bzw. hypothetisch apriori (unter Voraussetzung der allgemeinmenschlichen Sinnes- und Verstandesorganisation); oder formalistisch: Axiome sind faktische, willkürliche Setzungen oder Postulate; oder logizistisch: Axiome resultieren aus sachlicher Einsicht. (3) bezieht sich auf analytisch abgeleitete **Theoreme** (mathematische Demonstration, siehe KrV B 762–764). Vgl. KrV, Methodenlehre B 754: „Die Gründlichkeit der Mathematik beruht auf Definitionen, Axiomen, Demonstrationen". Dazu treten heute – über Kant im Wortlaut, aber nicht in der Sache hinausgehend – synthetisch-induktive Sachverhalte (konstruktivistische Induktion und experimentelle Mathematik). Vgl. zu diesen Dimensionen in der aktuellen Grundlagenforschung Schüler: *Grundlegungen der Mathematik in transzendentaler Kritik. Frege und Hilbert*, Hamburg 1983; Barrow: *Theorien für Alles*, Heidelberg / Berlin / New York 1992, und ders.: *Ein Himmel voller Zahlen. Auf den Spuren mathematischer Wahrheit*, Reinbek bei Hamburg 1999; Piaget:

Einführung in die genetische Erkenntnistheorie, 5. Aufl. Frankfurt/M. 1992.

- Standardtext zur in Rede stehenden kantischen Theorie der Mathematik ist v.a. KrV „Transzendentale Methodenlehre: Die Disziplin der reinen Vernunft“ (B 740–766, vgl. KrV Einleitung B). Wichtige **Beiträge der Kantforschung** hierzu sind Beth (*The Foundations of Mathematics. A Study of the Philosophy of Science*, Amsterdam 1959), Körner (Zur kantischen Begründung der Mathematik und der Naturwissenschaften. In: *Kant-Studien* [KS] 56 (1965), 463–473), Peters (Widerspruchsfreiheit und Konstruierbarkeit als Kriterien für die mathematische Existenz in Kants Wissenschaftstheorie. In: KS 57 (1966), 178–185), Menzel (Ordnungsrelationen und Mundus sensibilis. Eine Auseinandersetzung mit Ernst Cassirer. In: KS 59 (1968), 230–239), Martin (*Immanuel Kant. Ontologie und Wissenschaftstheorie*, 4. Aufl. Berlin 1969), Miller (Kant’s Philosophy of Mathematics. In: KS 66 (1975), 297–308), Mainzer (Objektivität durch konstruktive Verfahren. Zur Präzisierung des Kantischen Schematismus in der mathematischen Grundlagenforschung. In KS 66 (1975), 446–465), Böhme (Quantifizierung als Kategorie der Gegenstandskonstitution. In: KS 70 (1979), 1–16), Tuschling (Sind die Urteile der Logik vielleicht „insgesamt synthetisch“? In: KS 72 (1981), 304–335), Engfer (*Philosophie als Analysis. Studien zur Entwicklung philosophischer Analysiskonzeptionen unter dem Einfluß mathematischer Methodenmodelle im 17. und frühen 18. Jahrhundert*, Stuttgart-Bad Cannstatt 1982), Schüler (*Grundlegungen der Mathematik in transzendentaler Kritik. Frege und Hilbert*, Hamburg 1983), Winterbourne (Kitcher on Kant and Mathematics and Intuition. In: KS 80 (1989), 180–185), Friedman (*Kant and the Exact Sciences*, Cambridge/Mass. 1992), Carson (Kant on Intuition in Geometry. In: *Canadian Journal of Philosophy* 27 (1998), 489–512), Rai (*Kant’s Philosophy of Mathematics. An Exposition and Defense*, Namchi [Sikkim]1999), Falkenburg (*Kants Kosmologie: die wissenschaftliche Revolution der Naturphilosophie im 18. Jahrhundert*, Frankfurt/M. 2000), Koriako (Kants Schematismuslehre und ihre Relevanz für die Philosophie der Mathematik. In: *Archiv f. Geschichte der Philosophie* 83 (2001), 286–307). Wille: *Die Mathematik und das synthetische Apriori. Erkenntnistheoretische Untersuchungen über den Geltungsstatus mathematischer Axiome*, Paderborn 2007, hat ein ernstzunehmendes Argument für Kants Auffassung vorgelegt, dass die Mathematik insgesamt von synthetisch-apriorischen Grundsätzen ausgeht. Bekanntlich hatte Frege dies nur für die Geometrie gelten lassen, nicht jedoch für die Arithmetik. Und heute wird Mathematik sowieso insgesamt weithin als analytisch betrachtet.

- In o.g. Arbeiten finden sich nicht zuletzt auch seriöse Gegenkritiken an Versuchen, Kants Theorie der Mathematik zu disqualifizieren, wie Winterbournes (a.a.O. 1989) Auseinandersetzung mit Philip **Kitchers** kantkritischen Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik (Kant and the Foundation of Mathematics. In: *Philosophical Review* 84 (1975), 23–

50, und *The Nature of Mathematical Knowledge*, New York 1984). Die Kurzübersicht gibt daher die Gesamttendenz in der mathematischen Grundlagenforschung wieder, auch wenn selbstverständlich viele Aspekte der kantischen Theorie der Mathematik oder auch sie selbst insgesamt kontrovers diskutiert werden. Insbesondere ist **Parsons** (Kant's Philosophy of Arithmetic. In: C. Parsons, *Mathematics in Philosophy. Selected Essays,* New York 1983 [Paperback 2005], 110-149, und *Mathematical Thought and Its Objects*, Cambridge 2008) als – differenzierter – Kritiker der kantischen Theorie der Mathematik zu nennen, und mit Einschränkungen **Friedman** (Kant's Theory of Geometry. In: *Philosophical Review* 94 (1985), 455–506), der Kants Theorie als für ihre Zeit absolut angemessen rühmt, aber durch die modernen Entwicklungen überholt. Bereits Cassirer (Kant und die moderne Mathematik. Mit Bezug auf Russells und Couturats Werke über die Prinzipien der Mathematik. In: KS 12 (1907), 1–49) hatte vor einem zu selbstsicheren negativen Urteil moderner Logiker und Mathematiker, insbesondere **Couturats**, betreffs Kants Auffassungen gewarnt (vgl. Pulkkinen: Cassirer and Couturat's Critique of Kant's Philosophy of Mathematics. In: Gerhardt, V. u.a. (Hrsg.) *Kant und die Berliner Aufklärung. Akten des IX. Internationalen Kant-Kongresses*, V, Berlin/New York 2001, 315–322).

- Der Umfang der synthetisch-apriorischen Axiome kann dabei in der modernen Mathematik und auch bei Kant unterschiedlich ausfallen, da die apriorische Synthesis im Subjektbegriff (als Definition) vorgenommen werden kann oder im Urteil (als Axiom). Je nachdem wird auch der Umfang analytischer Theoreme größer oder kleiner werden.